УДК 517.5 **О.А.Тумка**

ОБ АППРОКСИМАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Введение. Рассмотрим множество F_1 всех непрерывных распределений $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, f – монотонная функция, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Выберем какую-либо функцию распределения $f_0 \in F_1$ и построим семейство функций $f_j(x) = f_0((x-\gamma_j)/\sigma_j)$. Ясно, что каждая из этих функций при любом выборе $\gamma_j \in \mathbf{R}$ и любом положительном σ_j будет функцией распределения. Рассмотрим далее множество всех вещественных функций $f(x,t)$, являющихся функциями распределения одномерных вероятностных процессов; обозначим его символом $F_{1,t}$. Таким образом, функция $f(x,t)$ задана на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. При каждом фиксированном t справедливо включение $f(\cdot,t) \in F_1$. Кроме того, предполагается, что $f(x,t)$ непрерывна в каждой точке (x,t). Выделим из пространства $F_{1,t}$ подпространство $R_{1,t}$ функций $f(x,t)$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) функция $f(x,t)$ непрерывна в каждом конечном отрезке $[a,b]$ в равной степени для всех $t \in \mathbf{R}$; 2) $f(x,t) \to 1$ при $x \to +\infty$, $f(x,t) \to 0$ при $x \to -\infty$ равномерно по отношению к $t \in \mathbf{R}$.

В.И. Зубовым установлены [1] следующие утверждения:

Теорема А. *Множество линейных комбинаций* $\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x)$ *будет всюду плотным в* F_1, *где* α_j *– неотрицательные константы, такие, что* $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$.

Положим

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

При таком выборе функции f_0 функции f_j будут нормальными распределениями с математическими ожиданиями γ_j и дисперсиями σ_j^2,

$$f_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_j} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\gamma_j)^2}{2\sigma_j^2}} dt.$$

Из теоремы А вытекает, что любое заданное распределение $f \in F_1$ может быть сколь угодно точно аппроксимировано смесью нормальных распределений в равномерной метрике в целом. А именно: найдутся математические ожидания γ_j, дисперсии σ_j^2 и неотрицательные числа α_j,

$\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$, такие, что

$$\sup_{x\in \mathrm{R}} \left| f(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_j} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\gamma_j)^2}{2\sigma_j^2}}\, dt \right| < \varepsilon.$$

Теорема B. *Всевозможные линейные комбинации* $\sum_{j=1}^n \alpha_j(t) f_j(x)$ *всюду плотны в пространстве* $R_{1,t}$, *где* $\alpha_j(t)$ *– произвольные неотрицательные непрерывные функции, заданные при* $t \in \mathbf{R}$, *и такие, что* $\sum_{j=1}^n \alpha_j(t) = 1$.

Таким образом, утверждается, что для любой функции $f(x,t) \in R_{1,t}$ для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такие числа n, γ_j, σ_j и неотрицательные непрерывные функции $\alpha_j(t)$, $\sum_{j=1}^n \alpha_j(t) = 1$, что

$$\sup_{x,t\in \mathbf{R}} \left| f(x) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t) f_j(x) \right| < \varepsilon.$$

Следствие A. Если $f_0(x)$ представляет собой нормальный закон распределения, то смеси нормальных законов распределения

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j(t)}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_j} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\gamma_j)^2}{2\sigma_j^2}}\, dt$$

при всевозможном выборе математических ожиданий γ_j, дисперсий σ_j^2 и неотрицательных непрерывных функций $\alpha_j(t)$, $\sum_{j=1}^n \alpha_j(t) = 1$ будут всюду плотны в пространстве $R_{1,t}$.

Изложенные результаты В.И. Зубова были развиты в работе В.В. Жука (см. [2]). В частности, в [2] установлены следующие предложения:

Пусть C – пространство непрерывных ограниченных функций $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ с нормой $\|f\| = \sup_{x\in \mathrm{R}} |f(x)|$, V – множество функций $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, у которых вариация $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(f) < \infty$, функция $\Psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ суммируема и такова, что $\int_{\mathbf{R}} \Psi = 1$, $\omega(f,h) = \sup_{|t|\le h} \|f(\cdot + t) - f\|$ – модуль непрерывности функции f в пространстве C. Тогда справедливы следующие утверждения:

Теорема C. *Пусть* A,α,$\beta > 0$, *функция* $f \in C \cap V$, $g(t) = \int\limits_{t}^{\infty} \Psi(u) du$. *Тогда ряд*

$$V_{\alpha,\beta}(f,g,x) = f(-\infty) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{f(\delta_{k,\beta}) - f(\delta_{k-1,\beta})\} g\Big(\frac{k\beta - x}{\alpha}\Big)$$

($\delta_{k,\beta}$ *– произвольные фиксированные точки отрезка* $[k\beta, (k+1)\beta]$) *равномерно сходится относительно* $x \in \mathbf{R}$ *и справедливо неравенство*

$$\|f - V_{\alpha,\beta}(f,g)\| \le \{\omega(f,\alpha \mathrm{A}) + \omega(f,\beta)\} \int\limits_{\mathbf{R}} |\Psi| + 2\|f\| \left\{ \int\limits_{-\infty}^{-\mathrm{A}} |\Psi| + \int\limits_{\mathrm{A}}^{\infty} |\Psi| \right\}.$$

П р и м е р А. Пусть А,α,$\beta > 0$, $f \in C \cap V$. Тогда

$$R_{\alpha,\beta}(f) =$$

$$= \left\| f(x) - f(-\infty) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{f(k\beta) - f((k-1)\beta)\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{(x-k\beta)/\alpha} e^{-u^2/2} du \right\| \le$$

$$\le \omega(f, \alpha\text{А}) + \omega(f, \beta) + \frac{4\|f\|}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\text{А}}^{\infty} e^{-t^2/2} dt.$$

Если K – класс функций $f \in C \cap V$, удовлетворяющий условиям

$$\sup_{f \in K} \|f\| < \infty, \lim_{h \to 0+} \sup_{f \in K} \omega(f, h) = 0,$$

то

$$\lim_{\alpha,\beta \to 0} \sup_{f \in K} R_{\alpha,\beta}(f) = 0.$$

Здесь мы устанавливаем аналоги теорем С и примера А для функций, принимающих значения в банаховом пространстве.

Приближение функций со значениями в банаховом пространстве в $C(\mathbf{R})$. Пусть $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}$ — соответственно множества вещественных и целых чисел; вместо $+\infty$ будем писать просто ∞; $\mathbf{X}$ – полное нормированное (вещественное) пространство, если x элемент $\mathbf{X}$, то его норма в $\mathbf{X}$ обозначается как $\|x\|$; C – пространство равномерно непрерывных ограниченных функций $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{X}$ с нормой $\|f\|_C = \sup\limits_{x \in \mathbf{R}} \|f(x)\|$; $\omega(f, h) = \sup_{|t| \le h} \|f(\cdot + t) - f\|_C$ — модуль непрерывности функции f в C.

Через B обозначаем множество вещественных последовательностей $\{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ таких, что $x_k < x_{k+1}$ при $k \in \mathbf{Z}$, $\lim_{k \to -\infty} x_k = -\infty$, $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = \infty$. По определению

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to -\infty}} \sum_{k=m}^{n}.$$

Если $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{X}$, то

$$\mathop{\mathrm{V}}_{-\infty}^{\infty}(f) = \sup_{\{x_k\} \in B} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \|f(x_{k+1}) - f(x_k)\|.$$

Полагаем

$$V = \left\{ f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{X} \;\mid\; \mathop{\mathrm{V}}_{-\infty}^{\infty}(f) < \infty \right\},$$

$$D = \left\{ \Psi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \;\mid\; \Psi \text{ суммируема на } \mathbf{R},\ \int_{\mathbf{R}} \Psi = 1 \right\}.$$

Пусть $\alpha,\beta > 0$, $f \in C \cap V$, $\Psi \in D$, $g(t) = \int_t^{\infty} \Psi(u)du$, $x \in \mathbf{R}$, $\gamma_{k,\beta} = f(\delta_{k,\beta})$, где $\delta_{k,\beta}$ – произвольные фиксированные точки отрезка $[k\beta,(k+1)\beta]$. Тогда полагаем

$$U_{\alpha,\beta}(f,\Psi,x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \gamma_{k,\beta} \frac{1}{\alpha} \int\limits_{k\beta}^{(k+1)\beta} \Psi\Big(\frac{t-x}{\alpha}\Big)dt, \qquad (1)$$

$$V_{\alpha,\beta}(f,g,x) = f(-\infty) + \sum_{k\in\mathbf{Z}} (\gamma_{k,\beta} - \gamma_{k-1,\beta}) g\Big(\frac{k\beta - x}{\alpha}\Big). \qquad (2)$$

Выражения, стоящие в правых частях формул (1) и (2), зависят и от выбора точек $\delta_{k,\beta}$. Однако, в дальнейшем мы будем считать эти точки фиксированными, и поэтому в обозначениях не будет отражена упомянутая выше зависимость.

Так как

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \bigg\| \gamma_{k,\beta} \frac{1}{\alpha} \int\limits_{k\beta}^{(k+1)\beta} \Psi\Big(\frac{t-x}{\alpha}\Big)dt \bigg\| \le \|f\|_C \sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{1}{\alpha} \int\limits_{k\beta}^{(k+1)\beta} \Big|\Psi\Big(\frac{t-x}{\alpha}\Big)\Big| dt =$$

$$= \|f\|_C \int\limits_{\mathbf{R}} |\Psi| \ , \qquad (3)$$

то ряд, стоящий в правой части (1), абсолютно сходится в $\mathbf{X}$ при любом $x \in \mathbf{R}$. Из условия $f \in V$ вытекает существование предела

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = f(-\infty).$$

Далее,

$$\|f(-\infty)\| + \sum_{k\in\mathbf{Z}} \|(\gamma_{k,\beta} - \gamma_{k-1,\beta})\| \Big| g\Big(\frac{k\beta - x}{\alpha}\Big) \Big| \le \|f(-\infty)\| +$$

$$+ \sum_{k\in\mathbf{Z}} \|(\gamma_{k,\beta} - \gamma_{k-1,\beta})\| \int\limits_{\mathbf{R}} |\Psi| \le \|f(-\infty)\| + \mathop{\mathrm{V}}_{-\infty}^{\infty}(f) \int\limits_{\mathbf{R}} |\Psi| \ .$$

Следовательно, ряд, стоящий в правой части (1), абсолютно сходится в $\mathbf{X}$ при любом $x \in \mathbf{R}$ и эта сходимость равномерна относительно $x \in \mathbf{R}$.

Лемма 1.*Справедливо соотношение*

$$U_{\alpha,\beta}(f,\Psi) \in C \ .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограниченность функции $U_{\alpha,\beta}(f,\Psi)$ очевидна в силу неравенств (3). Покажем ее равномерную непрерывность. Для любых $x,y \in \mathbf{R}$ имеем

$$\|U_{\alpha,\beta}(f,\Psi,x) - U_{\alpha,\beta}(f,\Psi,y)\| = \bigg\| \sum_{k\in\mathbf{Z}} \gamma_{k,\beta} \frac{1}{\alpha} \int\limits_{k\beta}^{(k+1)\beta} Bigl\{ \Psi\Big(\frac{t-x}{\alpha}\Big) -$$

$$-\Psi\Big(\frac{t-y}{\alpha}\Big)\Big\}dt\Bigg\| \le \|f\|_C \sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{1}{\alpha} \int\limits_{k\beta}^{(k+1)\beta} \Big|\Psi\Big(\frac{t-x}{\alpha}\Big) - \Psi\Big(\frac{t-y}{\alpha}\Big)\Big|dt =$$

$$= \|f\|_C \frac{1}{\alpha} \int\limits_{\mathbf{R}} \Big|\Psi\Big(\frac{t-x}{\alpha}\Big) - \Psi\Big(\frac{t-y}{\alpha}\Big)\Big|dt = \|f\|_C \int\limits_{\mathbf{R}} \Big|\Psi(t) - \Psi\Big(t+\frac{x-y}{\alpha}\Big)\Big|dt.$$

Осталось принять во внимание хорошо известный факт: для любой функции K, суммируемой на $\mathbf{R}$, справедливо равенство

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbf{R}} |K(x+t) - K(x)|dx = 0.$$

Лемма 2. *При любом* $x \in \mathbf{R}$

$$U_{\alpha,\beta}(f,\Psi,x) = V_{\alpha,\beta}(f,\Psi,x). \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем писать γ_k и y_k вместо $\gamma_{k,\beta}$ и $g(\frac{k\beta-x}{\alpha})$ соответственно. Легко увидеть, что

$$\sum_{k=m}^{n} \gamma_k \frac{1}{\alpha} \int\limits_{k\beta}^{(k+1)\beta} \Psi\Big(\frac{t-x}{\alpha}\Big)dt = \sum_{k=m}^{n} \gamma_k \int\limits_{\frac{k\beta-x}{\alpha}}^{\frac{(k+1)\beta-x}{\alpha}} \Psi(t)dt = \sum_{k=m}^{n} \gamma_k[y_k - y_{k+1}] =$$

$$= \sum_{k=m}^{n} \gamma_k y_k - \sum_{k=m+1}^{n+1} \gamma_{k-1} y_k = \gamma_m y_m - \gamma_n y_{n+1} + \sum_{k=m+1}^{n} [\gamma_k - \gamma_{k-1}] y_k.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=m}^{n} \gamma_{k,\beta} \frac{1}{\alpha} \int\limits_{k\beta}^{(k+1)\beta} \Psi\Big(\frac{t-x}{\alpha}\Big)dt = \gamma_{m,\beta}\, g\Big(\frac{m\beta-x}{\alpha}\Big) - \gamma_{n,\beta}\, g\Big(\frac{(n+1)\beta-x}{\alpha}\Big) +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{n} [\gamma_{k,\beta} - \gamma_{k-1,\beta}]\, g\Big(\frac{k\beta-x}{\alpha}\Big).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $m \to -\infty$, $n \to \infty$ и учитывая, что существует предел $\lim_{n\to\infty} \gamma_{n,\beta}$ и, кроме того,

$$\lim_{m\to-\infty} \gamma_{m,\beta} = f(-\infty), \qquad \lim_{m\to-\infty} g\Big(\frac{m\beta-x}{\alpha}\Big) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} g\Big(\frac{(n+1)\beta-x}{\alpha}\Big) = 0,$$

приходим к равенству (4).

Лемма 3. *Пусть* $\mathrm{A} > 0$. *Тогда*

$$\|U_{\alpha,\beta}(f,\Psi) - f\|_C \le \{\omega(f,\mathrm{A}\alpha) + \omega(f,\delta)\}\int\limits_{\mathbf{R}} |\Psi| + 2\|f\|_C\left\{\int\limits_{-\infty}^{-\mathrm{A}} |\Psi| + \int\limits_{\mathrm{A}}^{\infty} |\Psi|\right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{1}{\alpha} \int\limits_{k\beta}^{(k+1)\beta} \Psi\Big(\frac{t-x}{\alpha}\Big)dt = 1,$$

то при $x \in \mathbf{R}$

$$\|f(x) - U_{\alpha,\beta}(f,\Psi,x)\| = \left\|\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{1}{\alpha} \int\limits_{k\beta}^{(k+1)\beta} \{\gamma_{k,\beta} - f(x)\}\Psi\Big(\frac{t-x}{\alpha}\Big)dt\right\| \le$$

$$\le \sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{1}{\alpha} \int\limits_{k\beta}^{(k+1)\beta} \|\gamma_{k,\beta} - f(x)\|\Big|\Psi\Big(\frac{t-x}{\alpha}\Big)\Big|dt \le$$

$$\le \sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{1}{\alpha} \int\limits_{k\beta}^{(k+1)\beta} \omega(f,|x-\delta_{k,\beta}|) \times \Big|\Psi\Big(\frac{t-x}{\alpha}\Big)\Big|dt.$$

Отсюда, учитывая, что при $t \in [k\beta,(k+1)\beta]$

$$\omega(f,|x-\delta_{k,\beta}|) \le \omega(f,|x-t|) + \omega(f,|t-\delta_{k,\beta}|) \le \omega(f,|x-t|) + \omega(f,\beta),$$

находим

$$\|f(x) - U_{\alpha,\beta}(f,\Psi,x)\| \le \omega(f,\beta)\sum_{k\in\mathrm{Z}} \frac{1}{\alpha} \int\limits_{k\beta}^{(k+1)\beta} \Big|\Psi\Big(\frac{t-x}{\alpha}\Big)\Big|dt +$$

$$+\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{1}{\alpha} \int\limits_{k\beta}^{(k+1)\beta} \omega(f,|x-t|)\Big|\Psi\Big(\frac{t-x}{\alpha}\Big)\Big|dt =$$

$$= \omega(f,\beta)\int\limits_{\mathbf{R}} |\Psi| + \int\limits_{\mathbf{R}} \omega(f,|u|\alpha)|\Psi(u)|du. \tag{5}$$

Далее,

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \omega(f,|u|\alpha)|\Psi(u)|du \le \int\limits_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} \omega(f,|u|\alpha)|\Psi(u)|du +$$

$$\int\limits_{\mathbf{R}\setminus[-A,A]} \omega(f,|u|\alpha)|\Psi(u)|du \le \omega(f,\mathrm{A}\alpha)\int\limits_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}}|\Psi|+$$

$$+\int\limits_{\mathbf{R}\setminus[-A,A]} 2\|f\|_C|\Psi(u)|du+\omega(f,\mathrm{A}\alpha)\int\limits_{\mathbf{R}}|\Psi|+2\|f\|_C\int\limits_{\mathbf{R}\setminus[-A,A]}|\Psi|. \qquad (6)$$

Осталось сопоставить соотношения (5) и (6).

Теперь мы можем установить полные аналоги теоремы C и примера A.

Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{A},\alpha,\beta>0,\ \ \Psi\in D,\ \ f\in C\cap V,\ \ g(t)=\int_t^\infty\Psi(u)du.$ *Тогда ряд*

$$V_{\alpha,\beta}(f,g,x)=f(-\infty)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{f(\delta_{k,\beta})-f(\delta_{k-1,\beta})\}g\Big(\frac{k\beta-x}{\alpha}\Big),$$

где $\delta_{k,\beta}$ *– произвольные фиксированные точки отрезка* $[k\beta,(k+1)\beta]$, *равномерно сходится относительно* $x\in\mathbf{R}$ *и справедливо неравенство*

$$\|f-V_{\alpha,\beta}(f,g)\|_C\le\{\omega(f,\alpha\mathrm{A})+\omega(f,\beta)\}\int\limits_{\mathrm{R}}|\Psi|+2\|f\|_C\Bigg\{\int\limits_{-\infty}^{-\mathrm{A}}|\Psi|+\int\limits_{\mathrm{A}}^{\infty}|\Psi|\Bigg\}.$$

Доказательство теоремы 1 получается сопоставлением лемм 1–3.

П р и м е р. Пусть $\mathrm{A},\alpha,\beta>0,\ f\in C\cap V$. Тогда

$$R_{\alpha,\beta}(f)=$$

$$=\Bigg\|f(x)-f(-\infty)-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{f(k\beta)-f((k-1)\beta)\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{(x-k\beta)/\alpha}e^{-u^2/2}du\Bigg\|_C\le$$

$$\le\omega(f,\alpha\mathrm{A})+\omega(f,\beta)+\frac{4\|f\|_C}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathrm{A}}^{-\infty}e^{-t^2/2}dt.$$

Для доказательства примера достаточно положить в теореме 1

$$\Psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$$

Если K – класс функций $f\in C\cap V$, удовлетворяющий условиям

$$\sup_{f\in K}\|f\|_C<\infty,\qquad \lim_{h\to0+}\sup_{f\in K}\omega(f,h)=0,$$

то

$$\lim_{\alpha,\beta\to0}\sup_{f\in K}R_{\alpha,\beta}(f)=0.$$

Указатель литературы

1. **Зубов В.И.** Интерполяция и аппроксимация вероятностных распределений //Докл. АН СССР. 1991. Т. 316, N 6. С.1298-1301.

2. **Жук В.В.** О приближении функций в пространстве $C(\mathbf{R})$. Равенства типа Парсеваля // Мат. вопросы анализа негладких моделей / Под ред. В.Ф. Демьянова — СПб: Издательство С-Петербургского ун-та, 1995. С. 105-118 (Вопросы механики и процессов управления; Вып. 16).